Læren

om

homogene tunge Vædskers Tryk

paa

plane Arealer.

Af

Adolph Steen.

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 9 B. VII.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

1872.

De sædvanlige Fremstillinger af Læren om homogene tunge Vædskers Tryk paa plane Arealer ere gjerne meget kortfattede, og denne Korthed maa ogsaa for saa vidt siges at være berettiget, som Problemet derom fra et theoretisk Beregnings Standpunkt maa siges at være fuldkomment løst. Trykkets Störrelse finder sit Udtryk i en Formel, som tilmed lader sig tolke ved en let fattelig geometrisk Bestemmelse, og Trykcentrets Koordinater ere givne ved Integraler, som i mange praktiske Tilfælde vel kunne medføre nogen Vidtløftighed, men sjeldent nogen Vanskelighed. Ikke desto mindre maa det siges, at en saadan kort Fremstilling hverken fra theoretisk eller fra praktisk Standpunkt er ganske tilfredsstillende. I Theorien mangler der visse almindelige Resultater, som dog tildels forlængst ere bekjendte og derhos lette at naae. For de praktiske Ingeniører ere ogsaa disse almindelige Resultater af Vigtighed, baade fordi Integrationerne derved indskrænkes til de samme, som allerede forekomme ved Beregningen af Inertimomenter, og fordi netop disse Resultater selv let afføde en meget praktisk, graphisk Bestemmelse af Trykcentret. Da Forf. fandt alle de i den følgende Udvikling fremsatte Sætninger, paa de første Grundformler nær, var ogsaa hans første Tanke, at de ifølge deres saa nær liggende Indhold umulig kunde være nye, men, som saa meget andet, kunde være blevne tilsidesatte for de i Henseende til Sætningernes afsluttede Fremstilling saa hensigtsmæssige Integraler. Men de i den Anledning anstillede Undersøgelser have ikke bragt det forventede Udbytte; thi om end virkelig nogle Sætninger, og det af de vigtigste, findes hos ældre Forfattere, saa have de dog ikke faaet den fulde Betydning, der tilkommer dem, og i Lærebøgerne ere de ganske uomtalte, medens andre igjen synes aldrig at have været fremsatte før.

Simon Stevin synes at være den første, som har givet den nu bekjendte Regel for Beregning af tunge Vædskers Tryk paa plane Arealer og har fremsat nogen Forklaring paa og Bestemmelse af Trykkets Centrum. Hans Hydrostatik maa søges i tredie Del af *Hypomnemata Mathematica*, som af *Snellius* ere udgivne paa Latin i Leyden 1608 eller i fjerde Del af *Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin de Bruges* par *Albert Girard*, Leyden 1634; men begge Dele ere kun Oversættelser fra Hollandsk af *Beghinseln der Waaghconst*, trykt 1585. Men *Stevin* holder sig kun til simple Former af Arealer og giver saaledes kun en Skizze af Trykcentrets Bestemmelse i hvilkesomhelst retliniede Arealer. Derefter maa nævnes *Hermann* (*Phoronomia* 1716) og især *Cotes* (*Hydrostatical and Pneumatical Lectures*, Cambridge 1747); den sidste viser, at *Trykcentret er identisk med Stødcentret*, naar Arealets Skjæringslinie med Vædskens plane Overflade er Omdrejningsaxe. Det er denne Sætning, som dog let fremgaaer af de Integraler, som bestemme Trykcentrets Koordinater, der savnes i de berömte Lærebøger i Mechanik, saasom af *Poisson*, *Duhamel*, *Delaunay* o. fl., men faaer en kort Omtale efter Cotes af *W. Walton* i hans *Collection of Problems of Hydrostatics and Hydrodynamics*, *Cambridge 1847* og efter ham igjen af *Jullien* (*Probl. de Mécan. Rationelle*, *Paris 1855*). Selv hos de Forfattere, som specielt have givet sig af med hydrostatiske og hydrauliske Sætninger, findes hverken Cotes's Theorem eller dets Konsekvenser, mest maaske dog, fordi disse Forfattere saasom *Euler* (*Novi Comment. Petrop.* 13—16 tome) og *Bossut* (*Hydrodynamique* Paris 1787) haste over dette simple Spörgsmaal til vigtigere og mere vanskelige Theorier. En Forfatter, som synes at besidde et nöjere Kjendskab til Læren om tunge Vædskers Tryk, *Bresse* (*Cours de Mécanique appliquée*, Paris 1859), har dog ikke givet nogen fuldstændig og selvstændig Oversigt derover, men kun henvist til dens Analogi med en anden Theori, men i denne Henvisning ligger ikke Alt, hvad derom kan fortjene at udhæves.

Paa Grund af dette Sagens Standpunkt har Forf. troet at yde et ikke ganske værdiløst Bidrag til Hydrostatiken ved paany i en kort, men paa det nuværende Trin vistnok temmelig fuldstændig, Fremstilling at udvikle dette Afsnit af Mechaniken, og ledsage det med Exempler, som især oplyse de Sætninger, som tör anses for nye.

1. I en homogen tung Vædske af Tæthed ϱ faaer man paa et Punkt i Dybden z under den frie plane Overflade, idet g betegner Tyngdekraften, et *Tryk p paa Enhed af Areal*, som er

$$p = C + g\varrho z.$$

Konstanten C er det til $z = 0$ svarende p, altsaa det paa Overfladen virkende Tryk af Atmosphæren eller af andre Fluider, som befinde sig over Vædsken. Sætter man $C = g\varrho c$, altsaa $c = 0$, naar det udvendige Tryk er nul, faaer man

$$p = g\varrho\,(c + z),$$

saa at det ydre Tryks Virkning er den samme som af en forøget Vædskemængde i Höjden c over den givne frie Overflade. Man kan derfor afse fra det ydre Tryk og sætte med en passende Forøgelse af z

$$p = g\varrho z. \tag{1}$$

2. En plan Figur $AMBN$ (Fig. 1) af Areal A befinder sig i Vædsken og dens Plan skjærer den frie plane Overflade i Linien RS under Vinklen $\angle XCU = \alpha$ dermed. Vædsken kan beskylle begge Arealets Sider eller blot den ene; i sidste Tilfælde danner Arealet en Del af Beholderens Væg. Det samlede Tryk paa Arealet findes ved Summation af Trykkene paa de Elementer, som dannes ved Arealets Deling ved vandrette Linier, som MN, hvis Afstand fra Overfladen er den variable Störrelse z, idet hver Enhed modtager Trykket p bestemt ved (1). Sætter man $MN = f(z)$, antager for Arealets øverste Punkt A

$$z = h,$$

for det nederste B $\qquad z = H$

og for Arealets Tyngdepunkt G $\qquad z = z_1$,

saa er *Trykket paa hele Arealet*

$$P = g\varrho\int_h^H \frac{f(z)\,z\,dz}{\sin\alpha} = g\varrho A z_1. \tag{2}$$

Da Az_1 er Volumen af *en Cylinder eller et Prisme med Grundflade A og Höjde z_1*, vil Vægten af den deri indesluttede Mængde Vædske maale Trykket. Selvfølgelig kan man iøvrigt danne uendelig mange Volumina, som rumme den Vædske, hvis Vægt maaler Trykket. Man behøver f. Ex. blot at dreje den med $AMBN$ parallele øverste Endeflade af ovennævnte Cylinder eller Prisme om sit Tyngdepunkt for at faae skjævt afskaarne cylindriske eller prismatiske Volumina af den nævnte Störrelse. Derunder indbefattes det, som faaes, naar i hvert enkelt Punkt af Arealet oprejses en Linie vinkelret derpaa saa lang som Punktets Dybde under den frie Overflade, hvilket indirekte fremhæves af *Cotes* (Hydrostatical and Pneumatical Lectures, Cambridge 1747, Pag. 38) for at bevise den ovenfor i (2) udtrykte almindelige Sætning, men af *Delaunay* (Méc. Rat. Paris 1856 Pag. 456) udtrykkelig fremsættes. Men det hensigtsmæssigste Volumen synes, som det følgende skal vise, at være en symmetrisk skjæv Cylinder, som dannes saaledes: Arealets Plan drejes om sin Skjæringslinie RS med Overfladens Plan, indtil begge falde sammen og Arealet $AMBN$ lægger sig i Stillingen $A'M'B'N'$ paa den frie Overflade, og disse to kongruente, antiparallele plane Figurer tages til Endeflader for en Cylinder (Prisme), skjævt afskaaren for begge Ender, med sine retliniede Frembringere vinkelrette paa Planen RST, som halverer Vinklen α mellem de to Planer. Denne Cylinder (Prisme) har netop Volumen Az_1. Det maales nemlig ved Produktet af Arealet af Snittet $ambn$ vinkelret paa Frembringerne og Afstanden GG' imellem Tyngdepunkterne af $AMBN$ og $A'M'B'N'$. Men

$$ambn = A \cos \tfrac{1}{2}\alpha, \quad GG' = \frac{z_1}{\cos \frac{1}{2}\alpha},$$

altsaa

$$ambn \,.\, GG' = Az_1.$$

Det samme faaes ved Cylinderens Deling i Volumenelementer ved Planer som $MM'N'N$ vinkelrette paa Planen RST, og disses Störrelse faaes, idet man har

$$Cp = t = \frac{z}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}, \quad MM' = PP' = \frac{z}{\cos \frac{1}{2}\alpha},$$

bestemt som

$$MM'N'N = MN \,.\, MM' \,.\, dt = \frac{f(z)\, z dz}{\sin \alpha},$$

hvoraf Sætningen følger. Heri kan $f(z)$ være saavel en kontinuert, som en diskontinuert Funktion af z; det sidste finder blandt andet Sted, naar Arealet A er en Mangekant og Volumen prismatisk. Heraf følger, at

En homogen tung Vædskes Tryk paa et plant Areal er lig Vægten af et Volumen Vædske, begrændset af Arealets og Overfladens Plan, samt af en Cylinderflade med Arealets Omkreds til Ledelinie og Frembringeren vinkelret paa Halveringsplanen af den spidse Vinkel imellem de to Planer.

3. Centrum for alle de paa Arealets Elementer virkende parallele Tryk, som kaldes *Trykcentret*, kan bestemmes ved sine tre Koordinater, svarende til de tre Koordinataxer igjennem det Punkt C af Skjæringslinien RS, som denne Linie har tilfælles med en lodret Plan igjennem Arealets Tyngdepunkt G vinkelret paa Skjæringslinien, nemlig x-axen vinkelret paa RS i Overfladens Plan, y-axen i denne Linie og z-axen lodret. Kaldes Trykcentrets Koordinater ξ_1, η_1, ζ_1, saa er

$$\int_h^H f(z)\, z dz = \frac{\int_h^H f(z)\, xz dz}{\xi_1} = \frac{\int_h^H f(z)\, yz dz}{\eta_1} = \frac{\int_h^H f(z)\, z^2 dz}{\zeta_1}. \tag{3}$$

Men tre Koordinater ere ikke nødvendige til Trykcentrets Bestemmelse, da dette Punkt maa ligge i samme Plan, som alle Trykkenes Angrebspunkter, altsaa i $AMBN$. Foruden η_1 behøves derfor kun en af de to andre ξ_1 og ζ_1 at findes. Men man kan ogsaa søge Koordinaterne i $AMBN$'s Plan med Hensyn til Axen CU vinkelret paa RS og y-axen. Sættes $CP = u$, $MN = F(u)$ og erindres, at $u \sin \alpha = z$, faaer man til Trykcentrets Bestemmelse, idet $H = b \sin \alpha$, $h = a \sin \alpha$,

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\int_a^b F(u) uz du}{\int_a^b F(u) z du} = \frac{\int_a^b F(u) u^2 du}{\int_a^b F(u) u du}, \\ \eta_1 &= \frac{\int_a^b F(u) yz du}{\int_a^b F(u) z du} = \frac{\int_a^b F(u) uy du}{\int_a^b F(u) u du}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Da disse Udtryk ere uafhængige af α, saa læres heraf, at

Trykcentrets Beliggenhed i Arealets Plan er den samme for alle de Stillinger af denne Plan, som fremkomme ved dens Drejning om Skjæringslinien med Arealets Plan, saalænge Arealet beholder samme Beliggenhed i sin Plan.

Dette Resultat ligger vel i, hvad *Cotes* (paa anførte Sted Side 41—42) har lært om Trykcentrets Beliggenhed, men da *Ramus* (Anal. Mech. P. 369) kun har bevist Sætningen under to særegne Forudsætninger, nemlig naar Arealet har en retliniet Diameter og det berører Vædskens frie Overflade med sin Omkreds, og man ellers kun finder Exempler paa Sætningen, saa bör den her udtrykkelig fremhæves som et selvstændigt Resultat.

4. Søger man Tyngdepunktet i den skjævt, men symmetrisk afskaarne Cylinder, som omtales i Slutningen af 2, saa ses først, at det maa ligge i $ambn$, og dernæst, at det i denne Plan er bestemt ved Koordinaterne t_1 og η_1 henførte til Axerne CT og RS. Men man har

$$Cp = t = u \cos \tfrac{1}{2}\alpha, \quad MM' = PP' = 2t \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = 2u \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

følgelig
$$MM'N'N = 2F(u)\, t \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = 2F(u) u \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

saa at man, uden Angivelse af Grændserne for Integrationen med Hensyn til t, faaer

$$t_1 = \frac{2\int F(u)u \sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,tdt}{2\int F(u)u \sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,dt} = \frac{\int_a^b F(u)u^2du}{\int_a^b F(u)udu}\cos\tfrac{1}{2}\alpha = u_1\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\eta_1 = \frac{2\int F(u)u \sin\frac{1}{2}\alpha\, y\,.\,dt}{2\int F(u)u \sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,dt} = \frac{\int_a^b F(u)uydu}{\int_a^b F(u)udu}.$$

Naar altsaa Trykcentret Q i $AMBN$ projiceres paa Halveringsplanen af Vinklen α, faaes Tyngdepunktet q i den med Hensyn til $ambn$ symmetrisk afskaarne Cylinder, og omvendt.

Trykcentret i et Areal er en skraa Projektion af Tyngdepunktet i den symmetrisk afskaarne Cylinder, som rummer den Vædske, hvis Vægt er Maal for Trykket, og Projektionens Retning er parallel med Cylinderens Frembringere.

Delaunay (paa anførte Sted) finder Trykcentret ved at projicere den usymmetriske skjævt afskaarne Cylinders (se 2) Tyngdepunkt vinkelret paa Arealets Plan.

Det her udviklede lærer fremdeles, at *Trykcentret maa falde længere fra Skjæringslinien med den frie Overflade end Arealets Tyngdepunkt*, saalænge ikke $\alpha = 0$, fordi Formen af den skjæve Cylinder er saadan, at dens Tyngdepunkt i $ambn$ maa falde fjernere fra RS end Arealets Tyngdepunkt.

Endelig kan man af Sætningerne i (3) og (4) slutte, at *skjævt afskaarne Cylindre, som ere symmetriske med Hensyn til et paa Frembringerne vinkelret Snit, have samme Beliggenhed af Tyngdepunktet, hvilken Vinkel α der end ligger mellem Endefladerne.*

5. Indføres nu v for Afstanden CG fra y-axen RS til Arealets Tyngdepunkt, saa har man

$$v = \frac{\int_a^b F(u)udu}{\int_a^b F(u)du},$$

altsaa, naar Formlerne (4) multipliceres hermed,

$$\left.\begin{aligned} vu_1 &= \frac{\int_a^b F(u)u^2du}{\int_a^b F(u)du}, \\ v\eta_1 &= \frac{\int_a^b F(u)uydu}{\int_a^b F(u)du}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Men Nævneren heri er Arealet A og de to Integraler i Tællerne ere begge bekjendte fra Inertimomenternes Theori. Antages nemlig K at være den Omdrejningsradius, som hører til Inertimomentet af Arealet A med Hensyn til en Axe igjennem dets Tyngdepunkt G parallel med den i den frie Overflade liggende Linie RS, saa kan Tælleren i Udtrykket for vu_1, Inertimomentet med Hensyn til selve denne Linie RS, udtrykkes saaledes

$$\int_a^b F(u)u^2du = A(v^2 + K^2).$$

Endvidere er Tælleren i Udtrykket for $v\eta_1$ det Integral, hvorved man afgjör, om Axerne $CY(RS)$ og CU ere principale Axer i Arealet eller ej. Er nemlig

$$\int_a^b F(u)uydy = 0,$$

saa ere begge disse Axer principale Axer; men hvis Integralet er forskjelligt fra nul, ville de ikke være principale.

Heraf faaes først

$$vu_1 = v^2 + K^2$$

eller, naar man betegner Trykcentrets Afstand fra den vandrette Axe igjennem Tyngdepunktet $G\eta$ ved U_1, saa at $GQ = U_1 = u_1 - v$,

$$vU_1 = K^2. \tag{6}$$

Trykcentrets Afstand fra en vandret Axe igjennem Tyngdepunktet er altsaa den tredie proportionale Linie til Tyngdepunktets Afstand fra Skjæringslinien imellem Arealets og den frie Overflades Planer og Omdrejningsradius for Arealets Inertimoment med Hensyn til den nævnte Skjæringslinie.

Heraf følger endvidere, at

Trykcentret i et Areal er det samme som Arealets Svingningscentrum med Hensyn til Skjæringslinien imellem Arealets og den frie Overflades Planer (*Cotes's* Theorem, anførte Værk Side 42).

Fremdeles viser Formlen for $v\eta_1$ følgende Sætninger:

Har Arealet en principal Axe igjennem Tyngdepunktet vandret, saa ligger Trykcentret i den anden principale Axe.

Er den vandrette Axe igjennem Tyngdepunktet ikke principal, saa ligger Trykcentret ikke i Linien igjennem Tyngdepunktet vinkelret paa Planernes Skjæringslinie.

6. Betegner man ved k og h de Omdrejningsradier, som svare til de principale Inertimomenter med Hensyn til Axer igjennem Tyngdepunktet, saa har man for (6)

$$vU_1 = K^2 = k^2 \cos^2 \theta + h^2 \sin^2 \theta, \tag{7}$$

hvor θ er Vinklen imellem de to Axer, som svare til Omdrejningsradierne K og k, altsaa imellem $G\eta$ og den ene principale Axe eller imellem GU og den anden. Sammenholdes (7) med den bekjendte Relation imellem en hvilkensomhelst Halvdiameter eller Radius vektor r i en Ellipse, de to Halvaxer a og b samt Vinklen θ imellem r og a, nemlig

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{b^2} \sin^2 \theta,$$

Ellipsens polære Ligningen med Centrum som Pol, Axen $2a$ som fast Axe, saa ser man ikke blot det bekjendte, at Inertimomenterne ere omvendt proportionale med Ellipsens paa deres Axer afskaarne Radier, men ogsaa, at vU_1 er omvendt proportional med Kvadratet paa Radius vektor paa den Axe, med Hensyn til hvilken Trykcentret har Koordinaten U_1. Har man $\theta = 0$, saa at k svarer til Axen $G\eta$, h til GU, saa er $vU_1 = k^2$ omvendt proportional med a^2 og U_1 skal afsættes paa GU vinkelret paa k's Axe; men hvis $\theta = \frac{\pi}{2}$, saa falder den til h svarende Axe paa $G\eta$, $vU_1 = h^2$ er omvendt proportional med b^2, og U_1 skal atter afsættes paa GU. I begge Tilfælde er som forhen vist $\eta_1 = 0$. Har man $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$ eller $0 > \theta > -\frac{\pi}{2}$, saa vil Trykcentrets Afstand fra $G\eta$ være bestemt af $vU_1 = K^2$, omvendt proportional med r^2, Kvadratet af den paa $G\eta$ faldende Radius vektor, og U_1 afsættes atter paa GU. Heraf følger, at

Trykcentrets Afstand fra den vandrette Linie igjennem Arealets Tyngdepunkt er omvendt proportional med Kvadratet paa den Radius vektor til Centralellipsen, som falder paa den vandrette Linie.

Trykcentrets anden Koordinat η_1 findes udtrykt ved k, h og θ ved Hjælp af Relationen imellem et hvilketsomhelst Inertimoment $A\chi^2$ og de to AK^2 og AH^2, svarende til to paa hinanden vinkelrette Axer GK og GH, nemlig, idet ω er Vinklen imellem Axerne for $A\chi^2$ og AK^2,

$$A\chi^2 = AK^2 \cos^2 \omega + AH^2 \sin^2 \omega - 2 \sin \omega \cos \omega \int_a^b F(u)uydu.$$

Thi vil man udtrykke $A\chi^2$ ved de principale Inertimomenter, saa maae Axerne GK og GH drejes saameget som Vinklen θ bestemt ved

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\int_a^b F(u)uydu}{A(K^2 - H^2)}, \tag{8}$$

hvorved de falde sammen med de principale Axer Gk og Gh og man faaer

$$A\chi^2 = Ak^2 \cos^2 (\omega \pm \theta) + Ah^2 \sin^2 (\omega \pm \theta).$$

Man vil da ifølge den anden (5) og (8) have

$$v\eta_1 = \frac{\int_a^b F(u)uydu}{A} = \tfrac{1}{2}(K^2 - H^2) \operatorname{tg} 2\theta,$$

som igjen ved Hjælp af (7) for K^2 og den analoge for H^2,

$$K^2 = k^2 \cos^2\theta + h^2 \sin^2\theta,$$
$$H^2 = k^2 \sin^2\theta + h^2 \cos^2\theta,$$

bliver til

$$v\eta_1 = \tfrac{1}{2}(k^2 - h^2)\sin 2\theta = (k+h)\sin\theta \,.\, (k-h)\cos\theta. \tag{9}$$

η_1 er altsaa den fjerde proportionale Linie til v, $(k+h)\sin\theta$ og $(k-h)\cos\theta$. Kun $k = h$ eller $\theta = 0$ eller $\theta = \frac{\pi}{2}$ kan give $\eta_1 = 0$, saa at

Trykcentret ligger ikke i Linien igjennem Tyngdepunktet vinkelret paa Skjæringslinien af Arealet og Overfladen uden, naar enten alle Inertimomenter med Hensyn til Linier igjennem Tyngdepunktet ere ligestore, eller naar en principal Axe derigjennem er vandret (jfr. 5).

Da θ kan variere fra $-\frac{\pi}{2}$ til $+\frac{\pi}{2}$, saa vil man faae

$$\eta_1 \left\{\begin{matrix}\text{positiv,}\\ \text{negativ,}\end{matrix}\right. \text{ eftersom } k-h \text{ og } \theta \text{ have } \left\{\begin{matrix}\text{ens}\\ \text{modsatte}\end{matrix}\right\} \text{ Fortegn.}$$

Men betragtes i Fig. 2 med Axen $G\eta$ positiv nedad de fire hertil svarende Stillinger $k > h$ $\theta > 0$ (I), $k < h$, $\theta < 0$ (II), hvortil svarer positivt η_1, $k > h$, $\theta < 0$ (III), $k < h$, $\theta > 0$ (IV), hvortil svarer negativt η_1, saa ser man, at

Trykcentret falder paa den samme Side af U-axens positive Del som den af de to principale Axer, hvortil det mindste Inertimoment hører.

Fig. 3 viser Konstruktionen af $U_1 = Gq_1$ (jfr. 5) og $\eta_1 = Gq_2$, idet $Gc = Gc' = v$, $GK = K$, $Gd = (k+h)\sin\theta$, $Ge = (k-h)\cos\theta$ (uden Hensyn til Fortegnene); c, d, e bestemme en Cirkel, som skjærer η-axen i q_2. Gc afsættes nedad, naar η_1 er negativ, opad, naar η_1 er positiv, eller cG maa afsættes i en Retning, som er modsat den, der bestemmes af η_1's Fortegn.

7. I det foregaaende, navnlig i 6, ligger, at Trykcentret flytter sig dels i Arealets Plan, naar efterhaanden de forskjellige Axer igjennem Tyngdepunktet tænkes lagte vandrette, dels i det plane Snit RSU igjennem Vædsken, naar det givne Areal drejes om den givne Stilling af sit Tyngdepunkt. Naar de geometriske Steder for Trykcentret i begge Planer ere fundne, vil Trykcentret simpelthen være bestemt som et Skjæringspunkt imellem disse geometriske Steder.

Trykcentrets geometriske Sted i Arealets Plan faaes ved en Ligning imellem dets Radius vektor R fra Tyngdepunktet og Vinklen φ imellem denne Radius vektor og den til Inertimomentet Ah^2 svarende Axe. I Fig. 4 ere disse Störrelser afsatte under Forudsætning af, at $\angle\, UGh = \theta$ er positiv og $k > h$. Man har da

$$\left.\begin{aligned} U_1{}^2 + \eta_1{}^2 &= R^2, \\ \theta - \varphi &= \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\eta_1}{U_1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

hvoraf ved Elimination af θ findes det søgte geometriske Sted. Men den sidste Ligning giver ved (6) og (9)

$$\frac{\text{tg}\,\theta - \text{tg}\,\varphi}{1 + \text{tg}\,\theta\,\text{tg}\,\varphi} = \frac{\eta_1}{U_1} = \frac{(k^2 - h^2)\,\text{tg}\,\theta}{k^2 + h^2\,\text{tg}^2\,\theta},$$

hvoraf, naar Ligningen er bragt paa hel Form og $1 + \text{tg}^2\,\theta$ bortdivideret, faaes

$$k^2\,\text{tg}\,\varphi = h^2\,\text{tg}\,\theta. \tag{11}$$

Heraf kan først udledes

$$-\,\text{tg}\,\varphi\,\cot\theta = \text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{h^2}{k^2},$$

altsaa den Relation imellem φ og $\frac{\pi}{2} + \theta$, som svarer til de konjugerede Diametres Vinkler med Axen i en Ellipse, hvis Halvaxers Kvadrater ere proportionale med de principale Inertimomenter Ah^2 og Ak^2. Men disse ere atter omvendt proportionale med Kvadraterne paa Centralellipsens Halvaxer, a^2 og b^2, saa at

$$\text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{b^2}{a^2}$$

viser, at GQ og $G\eta'$ ere konjugerede Diametre og man har følgende Sætning:

Naar en Diameter i Arealets Centralellipse er vandret, ligger Trykcentret i den konjugerede Diameter.

Denne Sætning findes angivet i *Bresse* Cours de Mécanique appliquée, Prem. Partie, Paris 1859 Pag. 44, hvor dog ingen fuldstændig Udvikling findes af Læren om Vædskers Tryk, men Resultatet opnaaes ved at sammenholde denne Lære i Almindelighed med den analoge Theori om den ved givne Kræfter opstaaede Spænding paa Enhed af Arealet af Snittet i et prismatisk Legeme, naar Kræfterne have en enkelt med Prismets Kanter parallel Resultant.

Man kan nu eliminere θ imellem den første (10) og (11). Man finder nemlig ved Hjælp af (7) og (9)

$$v^2R^2 = v^2(U_1{}^2 + \eta_1{}^2) = (k^2\cos^2\theta + h^2\sin^2\theta)^2 + (k^2 - h^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

eller

$$v^2R^2 = k^4\cos^2\theta + h^4\sin^2\theta,$$

samt af (11)

$$\cos^2\theta = \frac{h^4\cos^2\varphi}{h^4\cos^2\varphi + k^4\sin^2\varphi},\quad \sin^2\theta = \frac{k^4\sin^2\varphi}{h^4\cos^2\varphi + k^4\sin^2\varphi},$$

saa at

$$R^2 = \frac{k^4h^4}{v^2(h^4\cos^2\varphi + k^4\sin^2\varphi)}, \tag{12}$$

som er Ligningen for en Ellipse med Axerne $\frac{k^2}{v}$ og $\frac{h^2}{v}$ liggende paa de to principale Axer igjennem Tyngdepunktet. Da disse Axer ere proportionale med de principale Inertimomenter i Arealet, saa blive de omvendt proportionale med Kvadraterne paa Centralellipsens Halvaxer. Tilmed vil $\varphi = 0$ give $R = \frac{k^2}{v}$ liggende paa Gh, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ derimod $R = \frac{h^2}{v}$ liggende paa Gk. Ere de principale Inertimomenter ligestore, bliver Ellipsen til en Cirkel.

Heraf følger, at

Det geometriske Sted for Trykcentret i et Areal er en Ellipse, hvis Halvaxer ere omvendt proportionale med Kvadraterne paa Centralellipsens Halvaxer og findes som tredie proportionale Linier til Tyngdepunktets Afstand fra Skjæringslinien imellem Arealets og Overfladens Planer og de principale Inertimomenters Omdrejningsradier, dog saaledes, at paa den ene principale Axe ligger den Halvaxe, som afhænger af den til den anden hørende Omdrejningsradius.

Denne Kurve kaldes *Trykcentrets Ellipse*, afsat i Fig. 5 for $k > h$.

8. *Det geometriske Sted for Trykcentret i det plane Snit igjennem Vædsken* faaes let af Ligningerne

$$vU_1 = k^2 \cos^2\theta + h^2 \sin^2\theta \qquad (7)$$

$$\text{og} \quad v\eta_1 = (k^2 - h^2)\sin\theta\cos\theta \qquad (9)$$

ved Elimination af θ. Man faaer nemlig af den sidste

$$\sin\theta = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{2v\eta_1}{k^2 - h^2}} \pm \sqrt{1 - \frac{2v\eta_1}{k^2 - h^2}}\right],$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{2v\eta_1}{k_2 - h^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{2v\eta_1}{k^2 - h^2}}\right],$$

øverste eller nederste Fortegn, eftersom man numerisk har $2\theta \gtrless \frac{\pi}{2}$, altsaa

$$2vU_1 = k^2 + h^2 \pm \sqrt{(k^2 - h^2) - 4v^2\eta_1^2}$$

eller

$$\left(U_1 - \frac{k^2 + h^2}{2v}\right)^2 + \eta_1^2 = \frac{(k^2 - h^2)^2}{4v^2}. \qquad (13)$$

Altsaa *Trykcentrets geometriske Sted i det plane Snit igjennem Vædsken, hvori Arealet ligger, er en Cirkel med Centrum i en Afstand fra Tyngdepunktet, som er den halve Sum af Halvaxerne i Trykcentrets Ellipse, og med en Radius, som er de samme Liniers halve Differens.*

Denne Cirkel kaldes *Trykcentrets Cirkel*, afsat i Fig. 6, idet $Gc = \frac{k^2 + h^2}{2v}$, $cq = \frac{k^2 - h^2}{2v}$. $\eta_1 = 0$ giver for U_1 de to Værdier $\frac{k^2}{v}$ og $\frac{h^2}{v}$; for $k > h$ svarer Q til den første, Q_1 til den anden Værdi, omvendt for $k < h$. Ifølge (9) er $\angle Qcq = 2\theta$, altsaa $QQ_1q = \theta = \angle kG\eta' = \angle hGU$; følgelig naar Gk er den principale Axe, som danner Vinklen θ med $G\eta'$, saa er q Trykcentrets tilsvarende Stilling i sin Cirkel, nemlig nedenfor GU i Figuren, hvis $k > h$, ovenfor, hvis $k < h$. Ligger den principale Axe, som svarer til det mindste Inertimoment, i GU, saa er $\theta = 0$ og Trykcentret Q i sin störste Afstand fra den vandrette Linie $G\eta$ igjennem Tyngdepunktet. Drejer denne principale Axe sig ned under GU, saa voxer θ, og Trykcentret bevæger sig paa den nederste Halvcirkel QqQ_1, indtil Axen Gh falder paa $G\eta$, da man faaer $\theta = \frac{\pi}{2}$ og Trykcentret i Q_1. Naar derefter den principale Axe med mindst Inertimoment forlader $G\eta$ for at falde ovenfor GU, saa vandrer Trykcentret langs den øverste Halvcirkel Q_1qQ tilbage til Q. Ere Arealets principale Inertimomenter ligestore, $k = h$, reduceres Trykcentrets Cirkel til sit Centrum.

Trykcentrets Cirkel varierer i Störrelse og Beliggenhed med Tyngdepunktets Afstand v fra Skjæringslinien med Overfladen. v kan ikke være nul, fordi i saa Fald ikke hele Arealet vilde være nedsænket i Vædsken, den ovenfor denne liggende Del deraf er altsaa udenfor dennes Paavirkning og kan ikke medtages i Beregningen. Den mindste Værdi af v svarer derfor til den Stilling af Arealet, hvori dets Omkreds berøres af den frie Overflades Plan i det nærmest Tyngdepunktet liggende Punkt deraf, uden dog tillige at skjæres af Planen. Men idet v voxer fra dette minimum i det uendelige, vil saavel Cirklens Radius som Centrets Afstand fra Tyngdepunktet konvergere til nul; for meget store v i Forhold til $k^2 - h^2$, kan Cirklen endog blive saa lille, at man med tilstrækkelig Tilnærmelse tör tage Trykcentret i Centrum, $U_1 = \dfrac{k^2 + h^2}{2v}$.

Naar Arealet sænkes dybere ned i det plane Snit igjennem Vædsken, saa bliver Trykcentrets Cirkel stedse mindre og falder stedse nærmere ved Tyngdepunktet, til hvilket Punkt den konvergerer i det uendelige.

9. Ved Trykcentrets Ellipse og Cirkel, afsatte i samme Plan, svarende til en given Dybde af Arealets Tyngdepunkt, en given Stilling af Arealets principale Axer og en given Störrelse af de principale Inertimomenter, findes Trykcentret, som det Skjæringspunkt imellem disse Kurver, der ligger nærmest ved den principale Axe med mindst Inertimoment, altsaa nærmest ved den störste Axe i Trykcentrets Ellipse, som Q i Fig. 5, hvor $k > h$ og $G\eta$ er den vandrette Axe.

10. Anvendes det udviklede paa Bestemmelsen af Trykket paa *en regelmæssig Mangekant*, indskreven i en Cirkel med Radius r og med n Sider, hver lig s_n, saa faaes med de oven angivne Betegnelser Trykket

$$P = \tfrac{1}{2} g\varrho n \sin\alpha \sin\frac{2\pi}{n} \cdot vr^2.$$

Inertimomentet af en regelmæssig Mangekant er ens for alle Axer igjennem dens Tyngdepunkt og i Mangekantens Plan, nemlig dets Omdrejningsradius (jfr. *Euler*, Theoria motus corporum solidorum, Cap. VI § 498) bestemt ved

$$k^2 = \tfrac{1}{6}\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right)r^2 = \tfrac{1}{24}\frac{2+\cos\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}s_n{}^2.$$

Trykcentret maa altsaa falde i den paa Skjæringslinien imellem Arealets og Overfladens Plan vinkelrette Linie igjennem Tyngdepunktet, nemlig i en Afstand fra dette Punkt, som er

$$\frac{k^2}{v} = \tfrac{1}{6}\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right)\frac{r^2}{v} = \tfrac{1}{24}\frac{2+\cos\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}\frac{s_n{}^2}{v}.$$

Hvis $v = r$, faaer man altid denne Afstand lig

$$\frac{k^2}{r} = \tfrac{1}{6}\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right)r,$$

lige meget om en Vinkelspids af Omkredsen falder i Overfladen eller ej.

Som specielle Anvendelser heraf mærkes følgende, hvor h er Höjden i den ligesidede Trekant ($n = 3$) eller mindste Radius i den regelmæssige Sexkant ($n = 6$):

$$n = 3 \quad \frac{k^2}{v} = \frac{r^2}{8v} = \frac{s_3{}^2}{24v} = \frac{h^2}{18v};$$

$$n = 4 \quad \frac{k^2}{v} = \frac{r^2}{6v} = \frac{s_4{}^2}{12v};$$

$$n = 6 \quad \frac{k^2}{v} = \frac{5r^2}{24v} = \frac{5h^2}{18v}.$$

Sætter man $n = \infty$, faaes den for *Cirklen* gjældende Bestemmelse af Trykket og Trykcentret, nemlig

$$P = \pi g\varrho \sin\alpha \,.\, vr^2, \quad \frac{k^2}{v} = \frac{r^2}{4v}.$$

11. Ved visse simple Former af Arealet behøver man ikke først at søge k^2 og h^2, men kan tvertimod benytte de her beviste Sætninger til Inertimomentets Bestemmelse.

Er Arealet saaledes en *Rektangel* med Siden a i Vædskens Overflade og den anden Side lig b, saa kan man først finde Tyngdepunktet i det Volumen, som indeholder den Mængde Vædske, hvis Vægt maaler Trykket (se Slutningen af 2). Dette Volumen er nemlig her et vandret tresidet Prisme, hvis Tyngdepunkts Beliggenhed er bekjendt, saa at dets skraa Projektion (jfr. 3) paa Rektanglens Plan falder i $\frac{2}{3}b$ fra denne Plans Skjæringslinie med Overfladen. Men Rektanglens Tyngdepunkt har Afstanden $v = \frac{1}{2}b$ fra samme Linie, altsaa er Trykcentrets Afstand fra Tyngdepunktet

$$\frac{k^2}{v} = \tfrac{2}{3}b - \tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{6}b,$$

følgelig

$$k^2 = \tfrac{1}{2}b \,.\, \tfrac{1}{6}b = \tfrac{1}{12}b^2$$

bestemmer Omdreiningsradius for Inertimomentet med Hensyn til den principale Axe, som gaaer vandret igjennem Tyngdepunktet. For det andet principale Inertimoment faaes

$$h^2 = \tfrac{1}{12}a^2.$$

Ligningerne for Trykcentrets Ellipse og Cirkel ere i det almindelige Tilfælde, naar Tyngdepunktets Afstand v fra Skjæringslinien med Overfladen er hvilkensomhelst $\geqq \frac{1}{2}b$,

$$R^2 = \frac{1}{144v^2}\,\frac{a^4b^4}{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}$$

og

$$\left(U_1 - \frac{a^2+b^2}{24v}\right)^2 + \eta_1{}^2 = \frac{(a^2-b^2)^2}{576v^2}.$$

For en hvilkensomhelst *Trekant* med Grundlinien g i den frie Overflade bliver Volumen af den trykkende Vædskemasse et Tetraeder, hvis Tyngdepunkt projiceres skraat efter den angivne Regel paa Trekantens Areal i den halve Höjdes (h) Afstand fra Grundlinien. Men for Trekantens Tyngdepunkt har man $v = \frac{1}{3}h$, altsaa

$$k^2 = \tfrac{1}{3}h\left(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{3}h\right) = \tfrac{1}{18}h^2.$$

Er det *en ligebenet Trekant,* saa er den ene principale Axe igjennem Tyngdepunktet Höjden, den anden en Linie parallel med Grundlinien og Inertimomenternes Omdrejningsradier ere henholdsvis $\frac{1}{24}g^2$ og $\frac{1}{18}h^2$. Disse blive kun ligestore, naar

$$\frac{h}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{altsaa } \textit{Trekanten ligesidet.}$$

For $\frac{h}{g} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, Trekantens Topvinkel mindre end 60°, er Inertimomentet störst med Hensyn til Paralleltransversalen igjennem Tyngdepunktet; men for $\frac{h}{g} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ forholder det sig omvendt.

Med $v \geqq \frac{1}{3}h$ har man Trykcentrets Ellipse og Cirkel saaledes bestemte:

$$R^2 = \frac{g^4h^4}{v^2(576\,h^4\cos^2\varphi + 324\,g^4\sin^2\varphi)},$$

idet φ er Vinklen imellem Höjden i Trekanten og Radius vektor til Trykcentret, tilhører Ellipsen og

$$\left(U_1 - \frac{3g^2+4h^2}{144v}\right)^2 + \eta_1{}^2 = \left(\frac{3g^2-4h^2}{144v}\right)^2$$

tilhører Cirklen.

Ved at lægge Trekanten med en Spids i den plane Overflade vilde man faae Vædskens Volumen som en firsidet Pyramide, hvis Tyngdepunkt projiceres skraat paa Trekanten i en Afstand $\frac{3}{4}h$ fra Skjæringslinien imellem Planerne, medens Tyngdepunktet i Trekanten har Afstanden $v = \frac{2}{3}h$ derfra. Deraf findes atter $k^2 = \frac{1}{18}h^2$.

12. Er Arealet *en Rhombus* med Diagonalerne a og b, den første vandret, saa antages først en Vinkelspids i Overfladens Plan og Tyngdepunktet af den trykkende Vædskes Volumen søges. Dette maa ligge i det rhombiske Snit, der halverer Vinklen α imellem Arealets og Overfladens Planer. Med samme Betydning af t og t_1 som i 2 og 4, med b for det rhombiske Snits heldende Diagonal og med β for Vinklen i Rhomben lige overfor a faaer man, efter Division med $4 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$,

$$t_1 \left(\int_o^{\frac{1}{2}b'} t^2 dt + \int_{\frac{1}{2}b'}^{b'} (b' - t) t dt \right) = \int_o^{\frac{1}{2}b'} t^3 dt + \int_{\frac{1}{2}b'}^{b'} (b' - t) t^2 dt,$$

som giver

$$\frac{1}{8} b'^3 t_1 = \frac{7}{96} b'^4,$$

altsaa

$$t_1 = \frac{7}{12} b'.$$

Skraat projiceret paa Rhomben giver det Cylinderens Tyngdepunkts Afstand fra Skjæringslinien imellem Planerne $\frac{7}{12}b$, saa at man faaer Trykcentrets Afstand fra Rhombens Tyngdepunkt at være

$$\frac{k^2}{v} = \frac{7}{12} b - \frac{1}{2} b = \frac{1}{12} b;$$

men $v = \frac{1}{2}b$, følgelig

$$k^2 = \frac{1}{24} b^2 \text{ og } h^2 = \frac{1}{24} a^2.$$

Disse blive kun ligestore for $b = a$, naar Rhomben er et Kvadrat; men jo nærmere dens Figur er Kvadratets, desto mindre afvige de to principale Inertimomenter fra hinanden og desto mindre bliver Trykcentrets Cirkel. For Tyngdepunktet bestemt ved $v \geqq \frac{1}{2}b$ faaer man følgende Ligninger for Trykcentrets Ellipse og Cirkel

$$R^2 = \frac{a^4 b^4}{576 v^2 (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)},$$

idet φ er Radius vektors Vinkel med Diagonalen b, og

$$\left(U_1 - \frac{a^2 + b^2}{24 v} \right)^2 + \eta_1{}^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{24 v} \right)^2.$$

13. Iblandt de Arealer, som have en saadan Beliggenhed, at *de vandrette Chorder $F(u)$ ere parallele med en principal Axe igjennem Tyngdepunktet,* betragtes følgende.

1°. $F(u) = pu^n$. Trykcentrets Afstand fra Skjæringen med Overfladens Plan faaes af

$$u_1 \int_a^b pu^{n+1}du = \int_a^b pu^{n+2}du$$

at være

$$u_1 = \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{b^{n+3} - a^{n+3}}{b^{n+2} - a^{n+2}}.$$

$n = 0$, $u_1 = \frac{2}{3}\frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2}$ gjælder *Rektanglen*,

$n = 1$, $u_1 = \frac{3}{4}\frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3}$, *Paralleltrapeziet.*

$n = 2$, $u_1 = \frac{4}{5}\frac{b^5 - a^5}{b^4 - a^4}$ tilhører et Areal begrændset af *to Parabelbuer*, hvis Axer ligge i Planernes Skjæringslinie, hvis Toppunkter falde sammen og hvis Parametre begge ere $\frac{1}{2p}$.

$n = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}(b + a)$ svarer til et Areal begrændset af *to ligesidede Hyperblers Buer* med Skjæringslinien til den ene fælles Asymptote og den derpaa vinkelrette Linie igjennem Tyngdepunktet til den anden.

$n = -4$ giver $\eta = pu^{-4}$ og $u_1 = \frac{2ab}{a+b}$, som er den harmoniske mellemproportionale Linie til a og b.

2°. $F(u) = p(c-u)^n$, $n > 0$, giver for $a = 0$, $b = c$,

$$u_1 \int (c-u)^n u du = \int_0^c (c-u)^n u^2 du.$$

Men man har ved delvis Integration

$$\int_0^c (c-u)^n u du = \frac{1}{n+1}\int_0^c (c-u)^{n+1}du = \frac{c^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

$$\int_0^c (c-u)^n u^2 du = \frac{2}{n+1}\int_0^c (c-u)^{n+1}u du = \frac{2c^{n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

følgelig

$$u_1 = \frac{2c}{n+3}. \tag{14}$$

$n = 2$ giver $u_1 = \frac{2}{5}c$ vedkommende et Areal begrændset dels af *to Buer af samme Parabel* med Toppunktet i $u = c$ og Axen vinkelret paa Skjæringslinien, dels af en Chorde i den frie Overflade.

3°. Sætter man i Udtrykket for u_1 i 1° $a = 0$, $b = c$, faaer man

$$u_1 = \frac{n+2}{n+3}c, \tag{15}$$

som for positive n ligger imellem $\frac{2}{3}c$ og c, medens det i 2° fundne Udtryk falder imellem 0 og $\frac{2}{3}c$.

Hvilken Beliggenhed man end vil kræve for Trykcentret i den rette Linie igjennem Arealets Tyngdepunkt vinkelret paa Skjæringslinien, saa kan den opnaaes ved Formlen (14) eller (15); thi $u_1 = \frac{p}{q}c$, $0 < p < q$, faaes for

$$\frac{p}{q} = \frac{n+2}{n+3} \text{ eller } \frac{p}{q} = \frac{2}{n+3},$$

hvoraf

$$n = \frac{2q-3p}{p-q} \text{ eller } n = \frac{2q-3p}{p},$$

henholdsvis eftersom

$$\frac{2}{3}c < \frac{p}{q} < c \text{ eller } 0 < \frac{p}{q} < \frac{2}{3}c.$$

14. For *Ellipsen* ere Inertimomentets Omdrejningsradier med Hensyn til de to principale Axer b og a henholdsvis bestemte ved $k^2 = \frac{1}{4}a^2$, $h^2 = \frac{1}{4}b^2$. Trykcentret er altsaa for en hvilkensomhelst Stilling af Ellipsen i det plane Snit igjennem Vædsken bestemt med Hensyn til Centret ved Koordinaterne U_1 og η_1 i Ligningerne

$$vU_1 = \tfrac{1}{4}(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta),$$
$$v\eta_1 = \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta.$$

For Trykcentrets Ellipse har man

$$R^2 = \frac{a^4b^4}{16v^2(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)}$$

og for Trykcentrets Cirkel

$$\left(U_1 - \frac{a^2+b^2}{8v}\right)^2 + \eta_1^2 = \frac{(a^2-b^2)^2}{64v^2}.$$

Da Halvaxerne i Trykcentrets Ellipse ere $\frac{a^2}{4v}$ og $\frac{b^2}{4v}$, som ikke ere proportionale med a og b, saa er Trykcentrets Ellipse ikke ligedannet med den Ellipse, hvortil den hører. Men da Forholdet imellem Halvaxerne i Trykcentrets Ellipse er lig Kvadratet paa Halvaxernes Forhold i den givne Ellipse, saa nærme Ellipserne sig til at blive ligedannede, naar Halvaxernes Forhold nærme sig til 1 (Cirklen).

Résumé.

La théorie de la pression des fluides sur des aires planes est en général très brièvement exposée, et, quant au calcul, réduite à des formules, suffisantes, il est vrai, pour la solution du problème, mais peu commodes dans la pratique. Ce fait est d'autant plus remarquable, que déjà chez *Cotes* (Hydrostatical and Pneumatical Lectures, Cambridge 1747) on trouve les rudimens d'une théorie meilleure. Parmi les auteurs suivans il n'y a, que je sache, que *W. Walton* (a Collection of Problems of Hydrostatics and Hydrodynamics Cambridge 1847), et, d'après lui, le *P. Jullien* (Problèmes de Mécanique rationnelle t. II. Paris 1855), qui aient fait mention du théorème de Cotes sur le centre de pression, sans pourtant en tirer les conclusions assez faciles qui seules complètent cette théorie. D'un autre côté, on trouve chez Mr. *Bresse* (Cours de mécanique appliquée Paris 1859 t. I p. 44) une analogie intéressante entre le centre de pression et celui de tension, mais de même sans exposition complète des théorèmes concernant le centre de pression. Voilà pourquoi, après avoir trouvé moi-même tous ces théorêmes très intéressans en théorie et très utiles en pratique, j'ai cru bien faire en reproduisant toute la dite théorie. Je me bornerai dans ce résumé à en donner l'exposition générale, en renvoyant pour les calculs au mémoire danois.

---

1 & 2. La pression totale d'un fluide sur une aire submergée est égale au poids du fluide contenu dans *un cylindre (prisme) compris entre la surface libre du fluide et l'aire donnée, et coupé obliquement par ces deux plans*, ayant donc pour bases l'aire donnée, et cette même aire ramenée sur la surface plane du fluide par un mouvement de rotation autour de la ligne de section de deux plans. (Voir la Fig. 1).

3 & 4. *Le centre de pression est la projection oblique du centre de gravité du cylindre* (prisme) nommé sur l'aire donnée; la ligne de projection est parallèle aux génératrices rectilignes du cylindre (prisme). (Voir les points q et Q Fig. 1).

Le centre de pression ne change pas de position parce que l'aire tourne autour de la ligne de section du plan de l'aire et de celui de la surface libre.

5. Pour déterminer la position du centre de pression dans le plan même de l'aire, nous nous servons d'un axe horizontal GU (Fig. 1) des u passant par le centre de gravité G, et d'un axe $G\eta$ des y perpendiculaire sur l'autre. Soit maintenant A l'aire donnée, v la distance CG entre G et le point d'intersection C de GU et de la ligne de section RS, u_1 et U_1 les distances respectives du centre de pression Q aux points C et G, AK^2 le moment d'inertie de l'aire A par rapport à l'axe $G\eta$. Alors on a pour les coordonnées U_1 et η_1 de Q les équations

$$vU_1 = AK^2,$$

$$v\eta_1 = \frac{\int_a^b F(u)uydu}{A},$$

$F(u)$ désignant la corde MN etc.

De ces formules on tire les conclusions suivantes

1°. Une construction facile de U_1.

2°. *Le centre de pression est le même que ceux de percussion et d'oscillation par rapport à la droite d'intersection des deux plans prise pour axe de rotation* (Le théorème de *Cotes*).

3°. Les deux théorèmes suivants.

Lorsqu'un axe principal passant par le centre de gravité de l'aire est horizontal, le centre de pression est situé sur la droite perpendiculaire à l'axe des η, c'est-à-dire sur l'autre axe principal.

Lorsque l'axe horizontal n'est pas un axe principal, le centre de pression n'est pas situé sur la droite perpendiculaire à $G\eta$.

6. Recourons maintenant, pour simplifier les formules, à la théorie des momens d'inertie. Soit AK^2 et AH^2 les momens d'inertie de l'aire par rapport à deux axes quelconques GK et GH perpendiculaires entre eux, et de même Ak^2 et Ah^2 les momens d'inertie principaux correspondant aux axes Gk et Gh, θ l'angle entre les axes GK et Gk. Par des théorèmes connus on trouve alors

$$\mathrm{tg}\ 2\theta = \frac{2\int_a^b F(u)uydu}{A(K^2 - H^2)},$$

par conséquent

$$v\eta_1 = \tfrac{1}{2}(K^2 - H^2)\ \mathrm{tg}\ 2\theta.$$

Mais entre les quatre rayons de gyration K, H, k, h il y a les relations

$$K^2 = k^2 \cos^2\theta + h^2 \sin^2\theta,$$

$$H^2 = k^2 \sin^2\theta + h^2 \cos^2\theta,$$

qui transforment l'expression ci-dessus en celle-ci

$$v\eta_1 = (k + h) \sin\theta \,.\, (k - h) \cos\theta,$$

de sorte qu'il n'y a que les trois cas suivans, $k = h$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ qui puissent réduire η_1 à zéro.

Le signe de η_1 dépend de ceux de deux facteurs $k - h$ et $\sin\theta$, θ pouvant ne pas passer les limites $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, de manière qu'on a toujours (voir la Fig. 2) *le centre de pression Q situé du même côté de la partie positive de l'axe des u que l'axe principal correspondant au plus petit moment d'inertie.*

La formule de $v\eta_1$ nous conduit facilement à la construction de η_1 indiquée dans la Fig. 3.

7 & 8. Les lieux géométriques du centre de pression, dans le plan de l'aire donnée et dans celui de la section plane du fluide où l'on a l'intention de placer l'aire, sont faciles à trouver. Nous les rapportons, d'une part, aux axes principaux du centre de gravité dans le plan de l'aire, et, d'autre part, à deux axes rectangulaires, dont l'un horizontal, passant par la place que le centre de gravité doit occuper dans la section plane du fluide.

En premier lieu, soit φ l'angle que fait le rayon vecteur R du point Q avec l'un des axes principaux (voir la Fig. 4); on trouve

$$\theta - \varphi = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{\eta_1}{U_1}\right),$$

d'où

$$\operatorname{tg}\varphi \cot\theta = -\frac{h^2}{k^2}$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{h^2}{k^2},$$

équation qui, traduite en langage ordinaire, donne le théorème suivant:

Lorsque l'un des diamètres conjugués de l'ellipse centrale du centre de gravité de l'aire est horizontal, le centre de pression est situé sur l'autre.

En éliminant θ entre cette dernière équation et

$$vU_1 = h^2\cos^2\theta + h^2\sin^2\theta$$

on trouve pour le lieu géométrique du centre de pression dans le plan de l'aire l'équation suivante en coordonnées polaires, R et φ,

$$R^2 = \frac{k^4h^4}{v^2(h^4\cos^2\varphi + k^4\sin^2\varphi)}.$$

Cette équation est évidemment celle d'une ellipse, que nous proposons d'appeler *l'ellipse du centre de pression* (Fig. 5). Les deux demi-axes de cette ellipse sont $\frac{k^2}{v}$ et $\frac{h^2}{v}$, le premier placé sur l'axe du moment principal Ah^2, le second sur celui du moment Ak^2. L'ellipse ne se change en un cercle que lorsque les momens d'inertie principaux sont égaux entre eux, $k = h$.

En second lieu, pour trouver l'équation de la courbe le long de laquelle se promène le centre de gravité dans le plan RSU du fluide, lorsque l'aire tourne autour de la position donnée de son centre de gravité G, nous n'avons qu'à éliminer θ entre les deux équations

$$vU_1 = k^2 \cos^2\theta + h^2 \sin^2\theta,$$
$$v\eta_1 = (k^2 - h^2)\sin\theta\cos\theta.$$

On obtient alors l'équation

$$\left(U_1 - \frac{k^2 + h^2}{2v}\right)^2 + \eta_1^2 = \left(\frac{k^2 - h^2}{2v}\right)^2,$$

qui est celle d'un cercle, que nous proposons d'appeler *le cercle du centre de pression.* Pour $k = h$ ce cercle se réduit à son centre, et, pour des valeurs très grandes de v ou des valeurs très petites de $k^2 - h^2$, il n'y a pas grande différence entre les positions des deux centres de pression et de gravité. Soit dans la Fig. 6 $\angle qCQ = 2\theta$, $\angle qQ_1Q = \theta = \angle kG\eta'$, alors le centre de pression correspondant à l'axe horizontal $G\eta$, sera celui des deux points q qui est le plus proche de l'axe principal du plus petit moment d'inertie. Soit encore Gh cet axe, et faisons le tourner autour du point G de sa position primitive GU au dessous de cet axe GU; le centre de pression marchera du point Q en parcourant le demi-cercle QqQ_1 inférieur, jusqu'au point Q_1, où il arrive lorsque Gh occupe la position $G\eta$. La partie supérieure $G\eta'$ de cet axe continuant de tourner pour recouvrir enfin la position primitive GU, le centre de pression parcourt le demi-cercle supérieur.

9. Il est bien clair que le centre de pression se présente le plus facilement, lorsqu'on superpose l'un sur l'autre les deux plans de l'aire et de la section du fluide de manière que les deux points G coïncident, et que l'axe, qui doit être horizontal après l'immersion de l'aire dans le fluide, occupe la position $G\eta$; car alors *les deux courbes du centre de pression vont se couper en deux points, dont celui qui est le plus proche de l'axe principal correspondant au plus petit moment d'inertie est le centre cherché.*

10—14. Quant aux exemples traités dans le mémoire, nous renvoyons à celui-ci, nous bornant à appeler l'attention sur la détermination facile des rayons de gyration principaux, que nous fournit la théorie exposée elle-même.

Fig. 1.

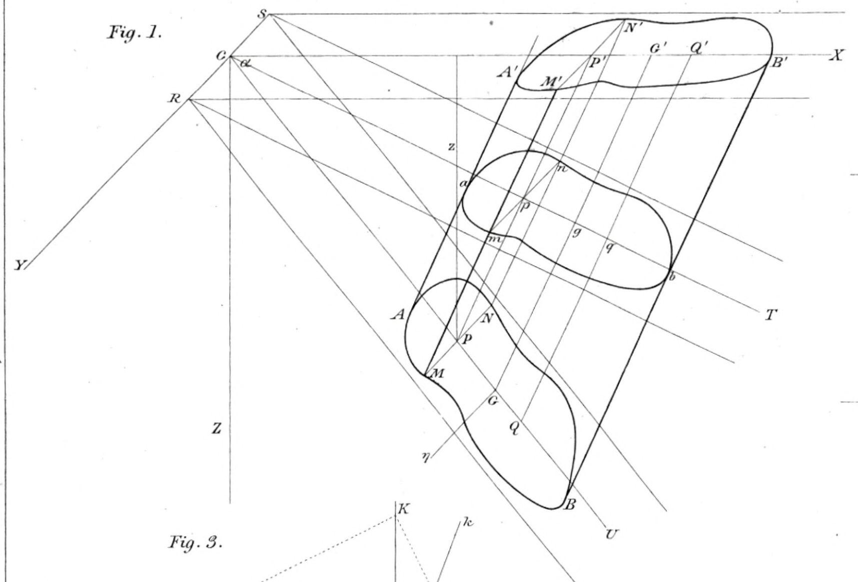


Fig. 2.

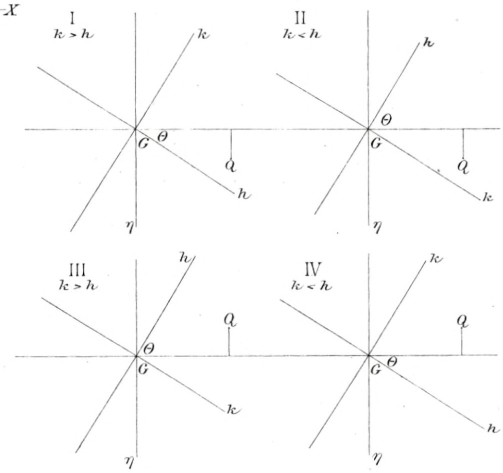


Fig. 3.

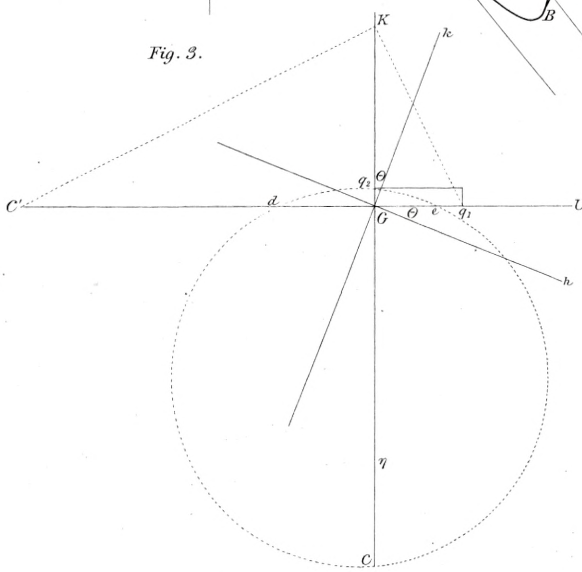


Fig. 4.
k > h

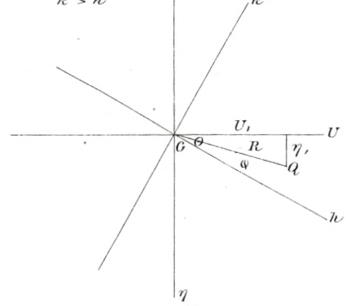


Fig. 5.

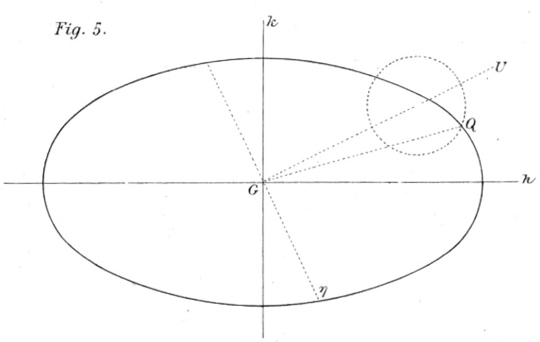
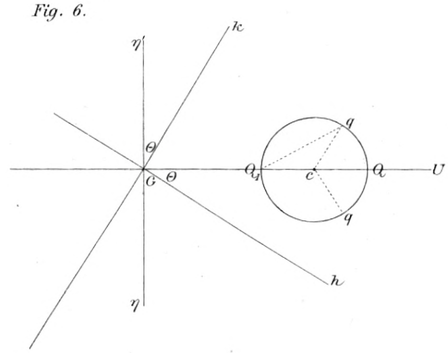


Fig. 6.



Th. Bergh's lith. Inst.